

Riadenie procesov

Zadanie č.2

Stabilita LSS

Meno: Zuzana Borošová
Mail: kabulko@post.sk
Katedra: Riadenie procesov
Dátum: 28.11.2005

2.1 Zadanie

Máme lineárny systém s prenosom

$$G_S(s) = Z / (Ts + 1)^3, \text{ kde } Z=5, T=6$$

a k tomu pripojený regulátor s prenosom

$$G_R(s) = Z_R + 1 / (T_I s) + T_D s$$

a/ Vyšetrite stabilitu uzavretého systému uvažovaním postupne P, PI, resp. PID tvar regulátora použitím algebrických kritérií (Pre PI regulátor vyšetrite stabilitu podľa Hurwitzovho kritéria!). Nájdite kritické hodnoty parametrov regulátorov a oblasti stability pre všetky 3 prípady, a to pri P reg. Z_R , pri PI reg. T_I a pri PID reg. T_D .

Pozn.: V prípade PI resp. PID môžeme určiť krit. hodnotu a oblasť stability naraz iba pre 1 parameter. Ostatné musíme zvoliť. Pri voľbe odporúčame zachovať nasledujúce základné hodnoty: $Z_R = 5$; $T_I = 10$; $T_D = 1$.

b/ Overte stabilitu systému a správnosť kritických hodnôt regulátorov podľa Nyquistovho kritéria, t.j. vyšetrením amplitúdovo-fázovou frekvenčnou charakteristikou otvoreného systému.

c/ Všetky prípady simulujte na počítači znázornením prechodovej charakteristiky pre skokovú zmenu žiadanej hodnoty $w = 1$ a zvolené hodnoty parametrov regulátorov postupne z oblasti stability, nestability a hranice stability.

2.2 P regulátor

2.2.a Vyšetrenie stability uzavretého systému P regulátora

$$G(s) = \frac{Z}{(Ts + 1)^3} = \frac{5}{(6s + 1)^3} = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = Z_r$$

$$G = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot Z_r = \frac{5 \cdot Z_r}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

Charakteristická rovnica:

$$1 + G = 1 + \frac{5 \cdot Z_r}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} = \frac{216s^3 + 108s^2 + 18s + (1 + 5 \cdot Z_r)}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

CHR:

$$\frac{216s^3 + 108s^2 + 18s + (1 + 5 \cdot Z_r)}{216 \quad 108 \quad 18 \quad (1 + 5 \cdot Z_r)} \quad / k = -\frac{216}{108}$$

$-\frac{216}{108} \cdot 108$	<i>opíšem</i>	$18 - \frac{216}{108} \cdot (1 + 5 \cdot Z_r)$	<i>opíšem</i>
0	108	$16 - 10 \cdot Z_r$	$1 + 5 \cdot Z_r$

$16 - 10 \cdot Z_r > 0$
 $10 \cdot Z_r < 16$
 $Z_r < 1,6$

$1 + 5 \cdot Z_r > 0$
 $Z_r > -\frac{1}{5}$

$Z_r \in (0; 1.6)$

2.2.b Overenie stability systému a správnosti kritických hodnôt P regulátora podľa Nyquistovho kritéria

Uzavretý systém: $1 + G_0(s) = 0$

Otvorený systém: $G_0(j\omega) = G_r(j\omega)G_s(j\omega) \rightarrow$ z tohto prenosu použitím príkazu nyquist získame amplitúdovo-fázovo frekvenčnú charakteristiku otvoreného systému.

V prípade, že otvorený systém je stabilný, uzavretý systém bude stabilný práve vtedy ak AFFCH otvoreného systému neobopína bod $(-1; 0j) \rightarrow$ neprechádza vľavo od tohto bodu cez reálnu os.

V mojom intervale $Z_r \in (0; 1.6)$ si zvolím tri hodnoty Z_r z ktorých bude jasne z grafov vyplývať stabilita, nestabilita systému.

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = 3$$

$$G_0 = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot 3 = \frac{15}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

Nyquist(G_0) : Ako vidieť na obr. 1, AFFCH ako modrá čiara prechádza vľavo od bodu -1 na reálnej osi, teda systém je nestabilný.

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = 1,6$$

$$G_0 = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot 1,6 = \frac{8}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

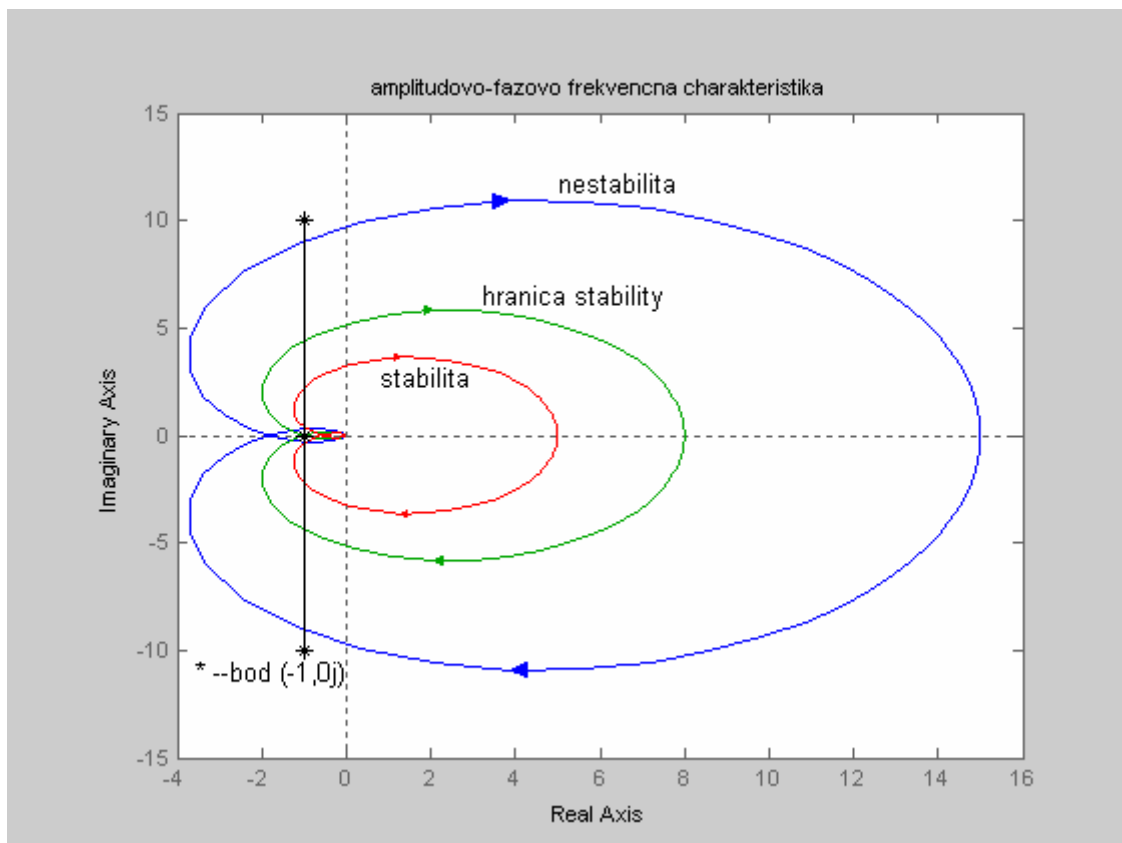
Nyquist(G_0) : Ako vidieť na obr.1, AFFCH ako zelená čiara prechádza priamo bodom -1 na reálnej osi, teda systém je na hranici stability.

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = 1,0$$

$$G_0 = G(s) \cdot G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot 1,0 = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

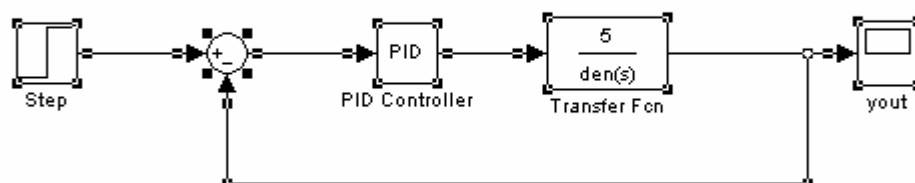
Nyquist(G_0) : Ako vidieť na obr. 1, AFFCH ako červená čiara prechádza vpravo od bodu -1 na reálnej osi, teda systém je na stabilný.



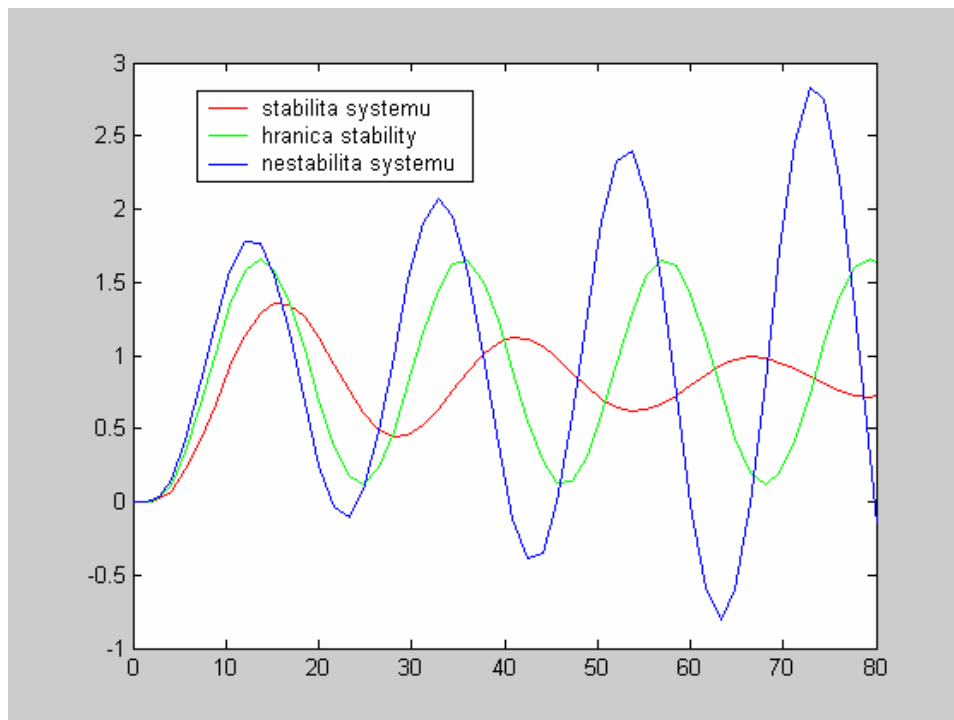
Obr. 1 AFFCH

2.2.c Znázornenie prechodovej charakteristiky pri simulácii

Všetky prípady som simulovala na počítači znázornením prechodovej charakteristiky pre skokovú zmenu žiadanej hodnoty $w = 1$ a zvolené hodnoty parametrov regulátorov postupne z oblasti stability ($Z_r = 1$), nestability ($Z_r = 3$), a hranice stability ($Z_r = 1,6$).



Obr. 2: Simulačná schéma pre získanie prechodových charakteristík P regulátora



Obr.3 P regulátor

2.3 PI regulátor

2.3.a Vyšetrenie stability uzavretého systému PI regulátora

$$G(s) = \frac{Z}{(Ts+1)^3} = \frac{5}{(6s+1)^3} = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = Z_r + \frac{1}{T_i s} = \frac{Z_r \cdot T_i s + 1}{T_i s} = \frac{Z_r s + \frac{1}{T_i}}{s}$$

$$G = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot \left(\frac{Z_r + \frac{1}{T_i}}{s} \right)$$

Charakteristická rovnica:

$$1 + G = 1 + \frac{5Z_r s + \frac{5}{T_i}}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} = \frac{216T_i s^4 + 108T_i s^3 + 18T_i s^2 + T_i s + (5Z_r T_i s + 5)}{216T_i s^4 + 108T_i s^3 + 18T_i s^2 + T_i s}$$

$$\underline{\underline{216T_i s^4 + 108T_i s^3 + 18T_i s^2 + T_i s + (5Z_r T_i s + 5) = 0 \quad / : T_i}}$$

$$\text{CHR: } 216s^4 + 108s^3 + 18s^2 + s + 5Z_r s + \frac{5}{T_i} = 0$$

$$216s^4 + 108s^3 + 18s^2 + (1 + 5Z_r)s + \frac{5}{T_i} = 0$$

$$a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0$$

Hurwitzovo kritérium stability:

Lineárny systém je stabilný práve vtedy, ak pri splnení podmienky $a_i > 0$ je hlavný Hurwitzov determinant D_n ako aj jeho všetky hlavné subdeterminanty $D_i > 0$.

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \cdot D_3 = a_0 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$a_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Z}{T_i} = \frac{5}{T_i} > 0$$

$$\frac{a_3 a_2 a_1 - a_1 a_1 a_4}{a_3 a_3} > a_0$$

$$\frac{108 \cdot 18 \cdot (1 + 5Z_r) - (1 + 5Z_r)(1 + 5Z_r) \cdot 216}{108 \cdot 108} > a_0$$

Pre moje Z_r z oblasti stability: $Z_r = 1,0$

$$\frac{108 \cdot 18 \cdot (1 + 5 \cdot 1) - (1 + 5 \cdot 1)(1 + 5 \cdot 1) \cdot 216}{108 \cdot 108} > a_0$$

$$0,333 > a_0 \Rightarrow 0,333 > \frac{5}{T_i} \Rightarrow T_i > 15,015$$

$$I = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{15,015} = 0,0666$$

$$I \in (0; 0,0666)$$

2.3.b Overenie stability systému a správnosti kritických hodnôt PI regulátora podľa Nyquistovho kritéria

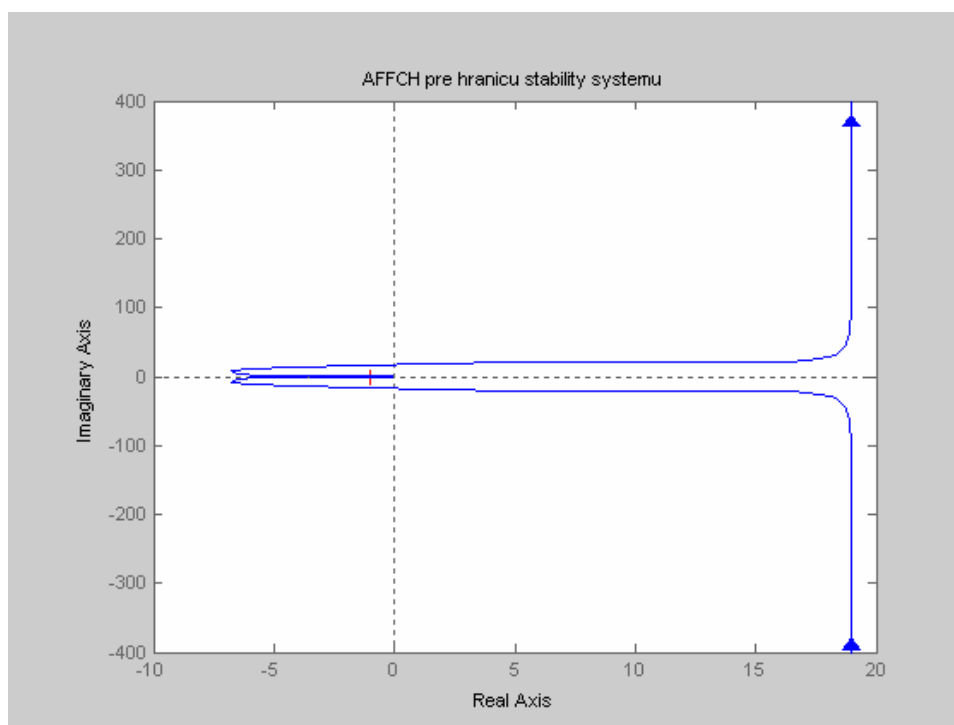
V mojom intervale $I \in (0; 0.0666)$ si zvolím tri hodnoty I z ktorých bude jasne z grafov vyplývať stabilita, resp. nestabilita systému.

Pre $I = 0,0667 \rightarrow T_i = 15,01$:

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = \frac{Z_r \cdot T_i s + 1}{T_i s} = \frac{5 \cdot 15,01s + 1}{15,01s}$$

$$G_0 = G(s) \cdot G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot \frac{5 \cdot 15,01s + 1}{15,01s} = \frac{375 + 5}{3242,16s^4 + 1621,08s^3 + 270,18s^2 + 15,01s}$$



Obr.4 AFFCH pre hranicu stability systému

Nyquist(G_0) : Ako vidieť na obr.4, AFFCH ako modrá čiara prechádza priamo bodom -1 na reálnej osi, teda systém je na hranici stability.

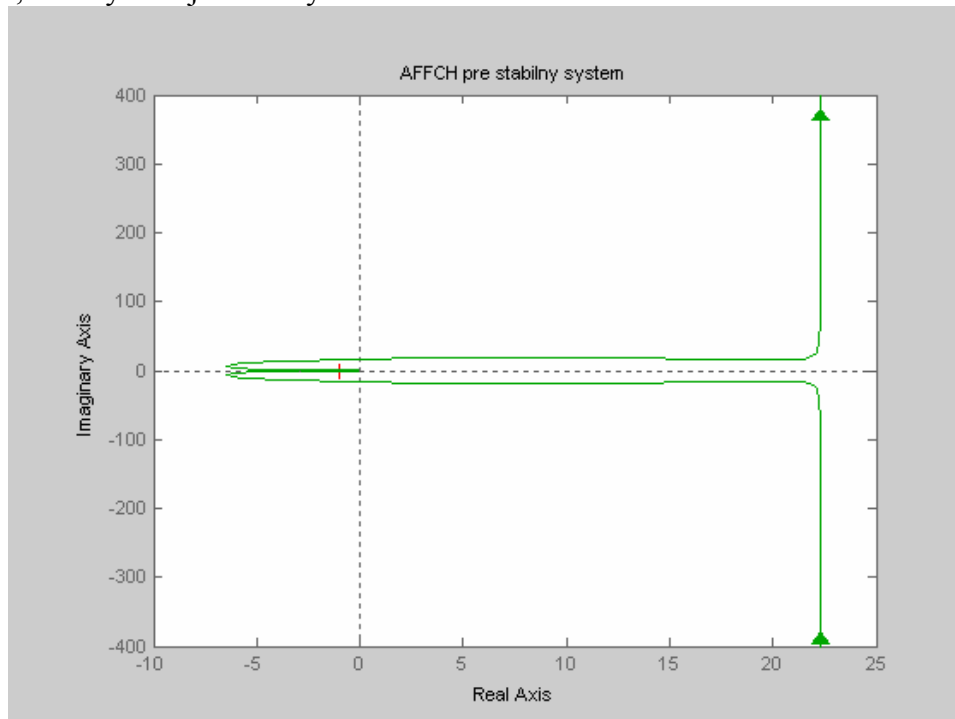
Pre I= 0,03 → Ti= 33,33:

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = \frac{Z_r \cdot T_i s + 1}{T_i s} = \frac{5 \cdot 33,33s + 1}{33,33s}$$

$$G_0 = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot \frac{5 \cdot 33,33s + 1}{33,33s} = \frac{833,25 + 5}{7199,28s^4 + 3599,64s^3 + 599,94s^2 + 33,33s}$$

Nyquist(G_0) : Ako vidieť na obr.5, AFFCH ako zelená čiara prechádza vpravo od bodu -1 na reálnej osi, teda systém je stabilný.



Obr. 5 AFFCH pre stabilný systém

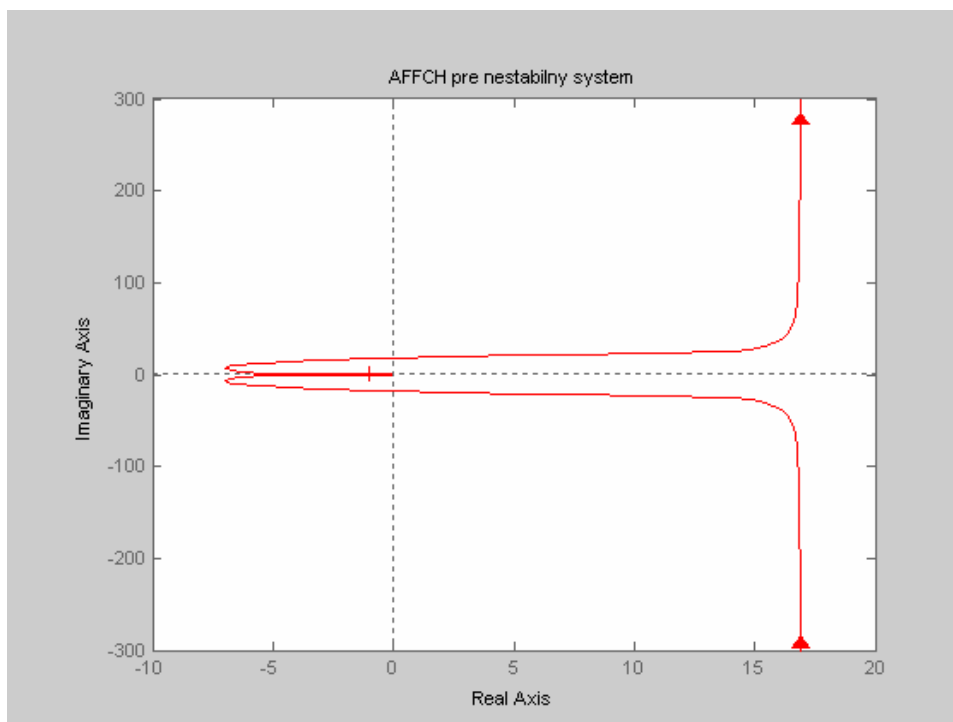
Pre I= 0,09 → Ti = 11,11:

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = \frac{Z_r \cdot T_i s + 1}{T_i s} = \frac{5 \cdot 11,11s + 1}{11,11s}$$

$$G_0 = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot \frac{5 \cdot 11,11s + 1}{11,11s} = \frac{277,55 + 5}{2400s^4 + 1200s^3 + 200s^2 + 11,11s}$$

Nyquist(G_0) : Ako vidieť na obr.6, AFFCH ako červená čiara prechádza vľavo od bodu -1 na reálnej osi, teda systém je nestabilný.

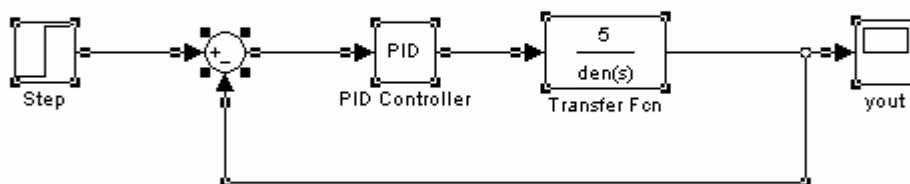


Obr. 6 AFFCH pre nestabilný systém

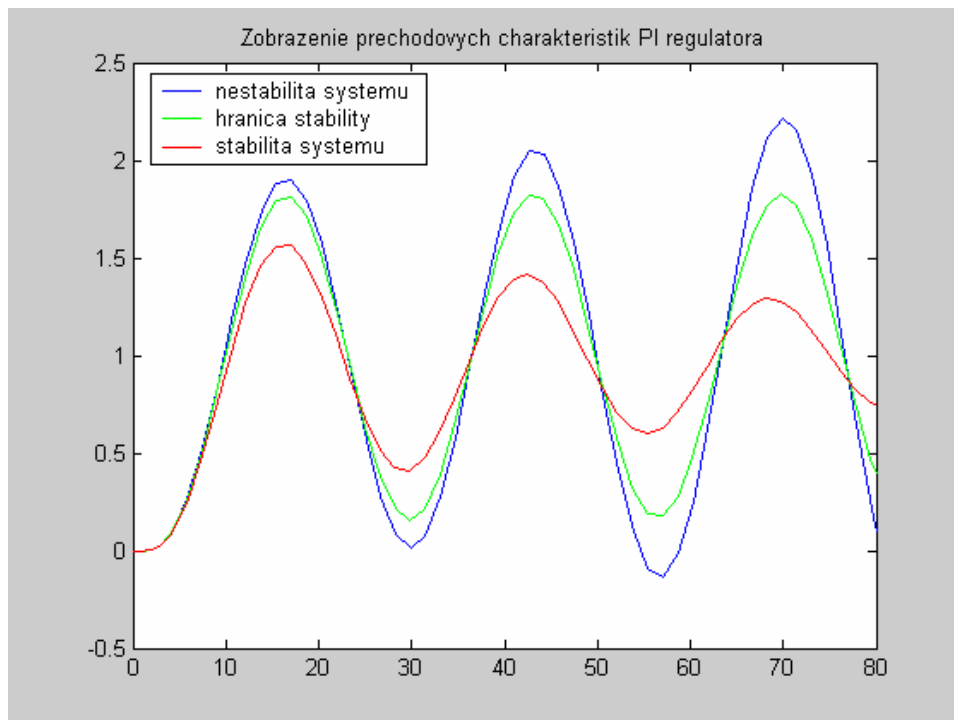
Pre nemožnú porovnateľnosť jednotlivých AFFCH som dala tri grafy namiesto jedného, ako je to pri P regulátore.

2.3.c Znáozornenie prechodovej charakteristiky pri simulácii

Všetky prípady som simulovala na počítači znázornením prechodovej charakteristiky pre skokovú zmenu žiadanej hodnoty $w = 1$ a zvolené hodnoty parametrov regulátorov postupne z oblasti stability ($I = 0,03$), nestability ($I = 0,09$), a hranice stability ($I = 0,0666$).



Obr.7 Simulačná schéma na získanie prechodových charakteristík PI regulátora



Obr 8 PI regulátor

2.4 PID regulátor

2.4.a Vyšetrenie stability uzavretého systému PID regulátora

$$G_R = Z_R + \frac{I}{s} + T_D s \quad Z_R = 1, \quad I = 0,2$$

$$1 + G_R G_S = \frac{T^3 s^4 + 3T^2 s^3 + (3T + ZT_D)s^2 + (1 + Z)s + IZ}{T^3 s^4 + 3T^2 s^3 + 3Ts^2 + s} = \frac{216s^4 + 108s^3 + (18 + 5T_D)s^2 + 6s + 0,5}{216s^4 + 108s^3 + 18s^2 + 1s}$$

Riešenie charakteristickej rovnice:

216	108	$(18 + 5T_D)$	6	1	$k = -\frac{216}{108}$
$-\frac{216}{108} \cdot 108$	<i>opíšem</i>	$-\frac{216}{108} \cdot 6$	<i>opíšem</i>	<i>opíšem</i>	
0	108	$(6 + 5T_D)$	6	1	$k = -\frac{108}{6 + 5T_D}$
$-\frac{108}{6 + 5T_D} \cdot (6 + 5T_D)$	<i>opíšem</i>	$-\frac{108}{6 + 5T_D} \cdot 1$	<i>opíšem</i>		
	0	$(6 + 5T_D)$	$\frac{30T_D - 72}{6 + 5T_D}$	1	

Riešenie:

$$6 + 5T_D > 0 \Rightarrow T_D > -1,5$$

$$\frac{30T_D - 72}{18 + 5T_D} > 0 \Rightarrow T_D > 2,35$$

$$T_D \in (2.35; \infty)$$

2.4.b Overenie stability systému a správnosti kritických hodnôt PID regulátora podľa Nyquistovho kritéria

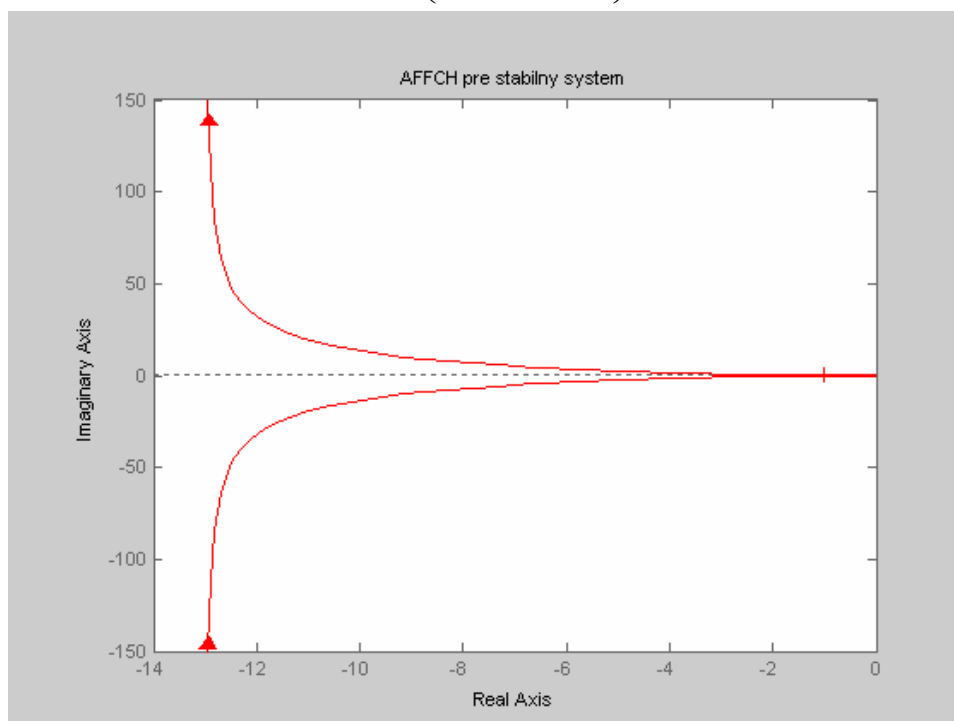
V mojom intervale $T_D \in (2.35; \infty)$ si zvolím tri hodnoty T_D z ktorých bude jasne z grafov vyplývať stabilita, resp. nestabilita systému.

Pre $Z_r = 1$; $I = 0.2$; $T_D = 3$:

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = Z_r + \frac{I}{s} + T_D s = 1 + \frac{0,2}{s} + 3s = \frac{3s^2 + 1s + 0,2}{s}$$

$$G_0 = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot \left(\frac{3s^2 + 1s + 0,2}{s} \right) = \frac{15s^2 + 5s + 1}{216s^4 + 108s^3 + 18s^2 + 1}$$



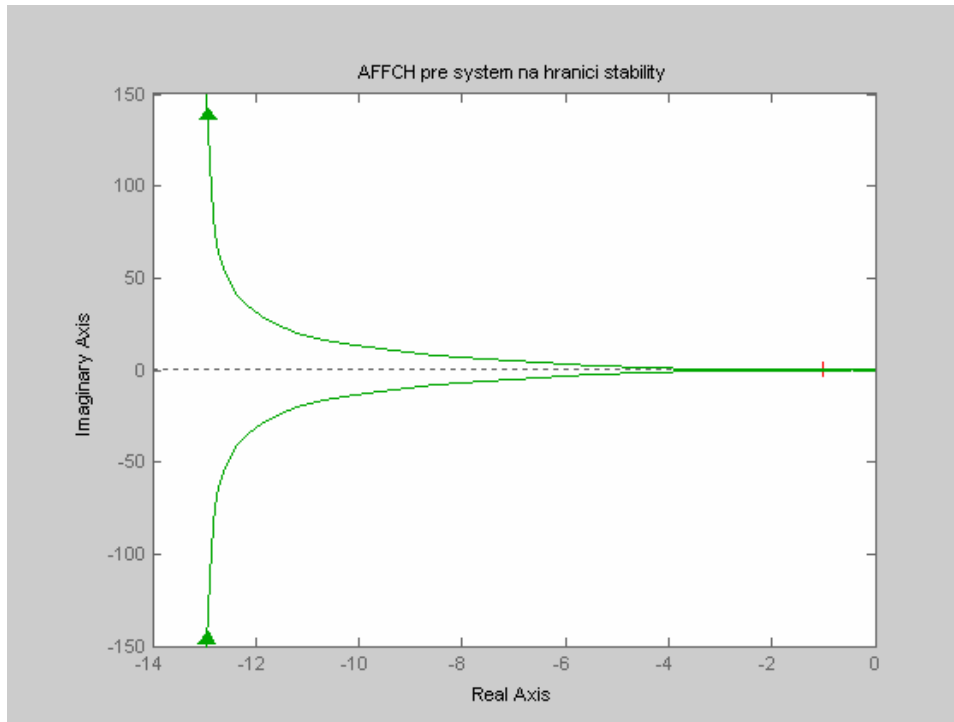
Obr. 9 AFFCH stabilného systému

Pre $Z_r = 1$; $I = 0.2$; $T_D = 2.35$:

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = Z_r + \frac{I}{s} + T_D s = 1 + \frac{0,2}{s} + 2,35s = \frac{2,35s^2 + 1s + 0,2}{s}$$

$$G_0 = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot \left(\frac{2,35s^2 + 1s + 0,2}{s} \right) = \frac{11,75s^2 + 5s + 1}{216s^4 + 108s^3 + 18s^2 + 1}$$



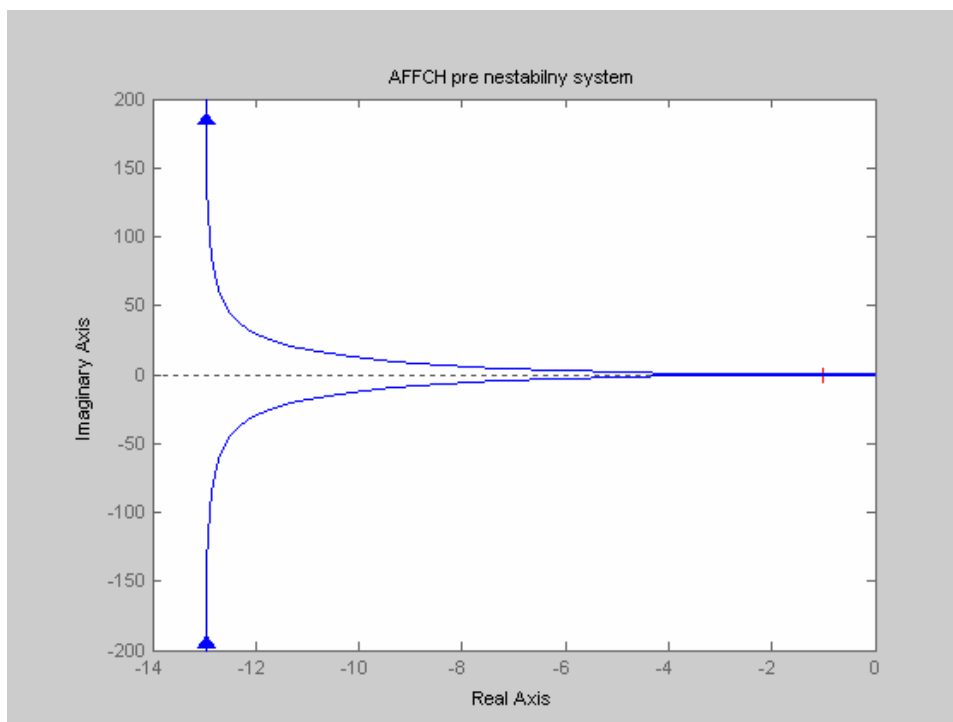
Obr.10 AFFCH systému na hranici stability

Pre $Z_r = 1$; $I = 0.2$; $T_D = 1$:

$$G(s) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$$

$$G(r) = Z_r + \frac{I}{s} + T_D s = 1 + \frac{0,2}{s} + 1s = \frac{1s^2 + 1s + 0,2}{s}$$

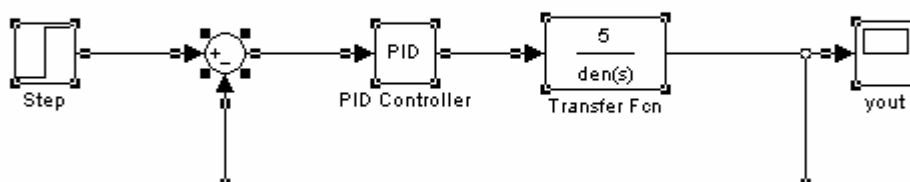
$$G_0 = G(s)G(r) = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1} \cdot \left(\frac{1s^2 + 1s + 0,2}{s} \right) = \frac{5s^2 + 5s + 1}{216s^4 + 108s^3 + 18s^2 + 1}$$



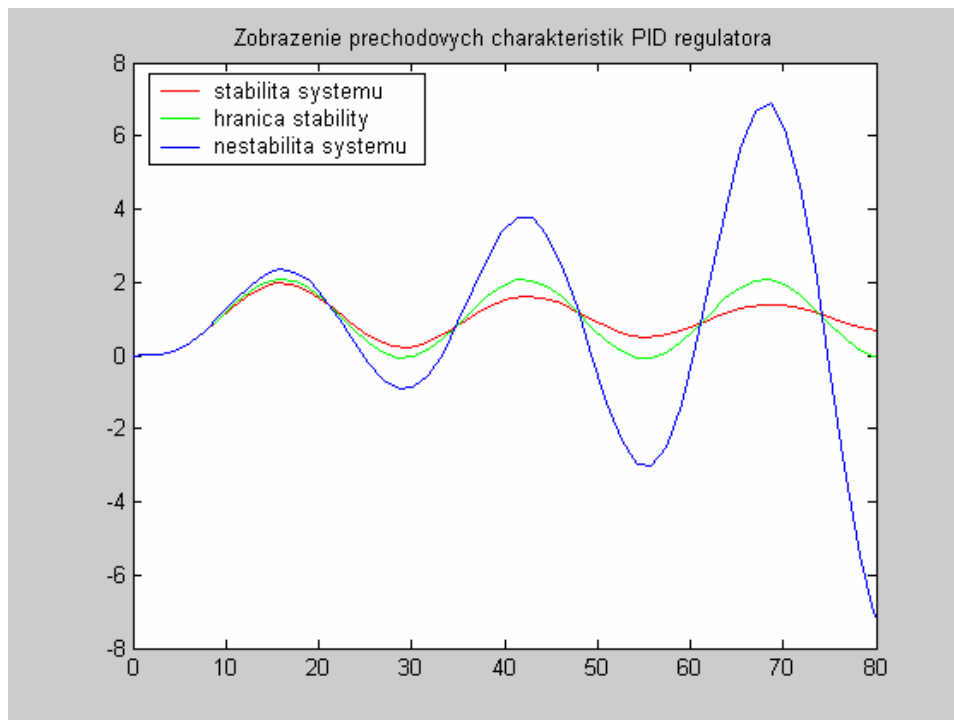
Obr. 11 AFFCH pre nestabilný systém

2.4.c Znáznorenie prechodovej charakteristiky pri simulácii

Všetky prípady som simulovala na počítači znázornením prechodovej charakteristiky pre skokovú zmenu žiadanej hodnoty $w = 1$ a zvolené hodnoty parametrov regulátorov postupne z oblasti stability ($T_D = 3$), nestability ($T_D = 1$), a hranice stability ($T_D = 2,35$).



Obr. 12 Simulačná schéma na získanie prechodových charakteristík PID regulátora



Obr. 12 PID regulátor

2.5 Záver

Kritická hodnota regulátora je určujúca hodnota ohraničujúca stabilnú oblasť daného systému. Pre môj systém daný prenosom $G(s) = \frac{Z}{(Ts+1)^3} = \frac{5}{(6s+1)^3} = \frac{5}{216s^3 + 108s^2 + 18s + 1}$ a regulátor typu P bolo $Z_r \in (0; 1.6)$ pričom kritickou hodnotou je hodnota $Z_r = 1,6$.

Ak som uvažovala regulátor typu PI a hodnotu Z_r som zvolila $=1$, I patrí do intervalu $I \in (0; 0.0666)$, pričom kritickou hodnotou je hodnota $0,0666$.

Pri uvažovaní PID regulátora a zvolení $Z_r = 1$, $I = 0,2$ mi vyšla hodnota T_D v intervale $T_D \in (2.35; \infty)$, pričom kritickou hodnotou je hodnota $2,35$.

Pre všetky typy regulátorov som závery potvrdila simulačne ako aj Nyquistovým kritériom otvoreného systému.